Олег Никифорчин

Вступ до топології

Підтримано грантом програми
“Talents for Ukraine”
Благодійного фонду “Київська школа
економіки”

Івано-Франківськ

2024

УДК 515.1
MSC 2020: 54-01
Н62

Підтримано грантом програми “Talents for Ukraine” Благодійного фонду “Київська школа економіки”.

Схвалено до друку вченою радою факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Рецензенти: проф., д.ф.-м.н. М.М. Зарічний, завідувач кафедри алгебри, топології та основ математики Львівського національного університету ім. Івана Франка;

чл.-кор. НАН України, проф., д.ф.-м.н. С.І. Максименко, завідувач відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України;

проф., д.ф.-м.н. $\boxed{\text{В.К. Маслюченко}}$, завідувач кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету ім. Юрія Федьковича.

Никифорчин, Олег

Н62 Вступ до топології / Олег Никифорчин. — Івано-Франківськ: Голіней О.В., 2024. — 324 с.

ISBN 978-617-95377-8-3

У вигляді курсу лекцій викладено основи загальної (теоретико-множинної) топології, початки теорії многовидів та алгебраїчної топології. Наведено необхідні факти та поняття з теорії множин. Розглянуто метричні та топологічні простори, їх відображення, основні типи і властивості, зокрема, питання відокремленості, компактності та метризовності. Висвітлено основні властивості топологічних і диференційовних многовидів та відображень між ними. Подано елементи теорії гомотопій із застосуваннями до обчислення фундаментальних груп. Кожна лекція супроводжується питаннями та завданнями для самостійного розв’язування.

УДК 515.1

ISBN 978-617-95377-8-3
© Олег Никифорчин, 2024

Зміст

Вступ 10

Розділ I. Множини та їх відображення. Метричні простори 12
Лекція 1. Множини. Відношення. Відображення 12
А. Множини та індексовані набори 12
Б. Дії над множинами 13
В. Відношення та їх властивості 14
Г. Функції 15
Д. Обмеження 16
Е. Композиції. Тотожні відображення 17
Ж. Діаграми та їх комутативність 17
Лекція 2. Властивості відображень. Потужності множин 23
А. Прообрази елементів та множин 23
Б. Ін'єктивні відображення 24
В. Сюр'єктивні відображення. Відношення еквівалентності, фактор-множини та фактор-відображення 24
Г. Ін'єкції і сюр'єкції у композиціях 25
Д. Бієктивні відображення. Обернені функції 26
Е. Ліві і праві обернені відображення 27
Ж. Потужності множин 28
Лекція 3. Метричні простори 34
А. Метрика і метричний простір 34
Б. Класичні метрики 34
В. Ультраметрики та псевдометрики 35
Г. Підпростори і прямі добутки просторів 36
Д. Кулі і замкнені кулі 38
Е. Послідовності та їх границі 38
Ж. Точки дотику множини. Замкнені множини 40
И. Внутрішні точки множини. Відкриті множини 40
К. Властивості замкнених та відкритих множин 41
Л. Замикання, внутрішність і межа 42
Лекція 4. Властивості метричних просторів 48
А. Скрізь щільні та ніде не щільні множини 48
Б. Густина метричного простору 49

В. Фундаментальні послідовності. Повні та неповні простори 50
Г. Повні підпростори 51
Д. Відображення, що зберігають відстані. Ізометрії 52
Е. Поповнення метричного простору 53
Ж. Мінімальність поповнення 54
И. Єдиність поповнення 56
Лекція 5. Неперервні відображення метричних просторів 60
А. Означення неперервності та їх рівносильність 60
Б. Рівномірна неперервність 62
В. Збереження неперервності обмеженнями та композиціями 63
Г. Неперервність функції кількох змінних 64
Д. Добутки відображень та їх неперервність 65
Е. Неперервність та відкриті множини 66
Ж. Топологічна еквівалентність метрик 67
И. Еквівалентність метрик за Коші та рівномірна еквівалентність 69
К. Гомеоморфізми метричних просторів 70

Розділ II. Топологічні простори 79
Лекція 1. Топології та способи їх задання 79
А. Топологія і топологічний простір. Метризовні і неметризовні топології 79
Б. Замкнені множини 81
В. Внутрішність, замикання, межа і похідна множина. Внутрішня точка, точка дотику, гранична точка 82
Г. Оператор замикання і задання топології з його допомогою. Оператор внутрішності 84
Лекція 2. Бази і передбази. Кардинальні функції 89
А. Задання топології базою 89
Б. Чи є сім'я множин базою? 89
В. Передбаза 91
Г. Бази та передбази замкнених множин 92
Д. Локальна база у точці 93
Е. Повна система околів 94
Ж. Скрізь щільні та ніде не щільні множини 95

И. Густина та вага топологічного простору. Характер простору в точці 95
К. Сепарабельність. Перша та друга аксіоми зліченності 97
Л. Ліндельофові простори 98
Лекція 3. Неперервні відображення топологічних просторів 104
А. Неперервність у точці 104
Б. "Глобальна" неперервність 105
В. Секвенціальна неперервність 107
Г. Неперервність композиції неперервних відображень. Гомеоморфізм 109
Лекція 4. Топології, визначені відображеннями. Підпростори та фактор-простори 113
А. Перенесення топології вздовж відображення 113
Б. Підпростори 115
В. Неперервність відображення та його обмежень 117
Г. Топологічні вкладення 118
Д. Фактор-простори 119
Лекція 5. Топології, визначені сім'ями відображень. Топологічні суми та добутки 125
А. Фінальна топологія. Топологічна сума 125
Б. Букети та приклеювання 126
В. Ініціальна топологія. Топологічний добуток 127
Г. Добуток довільної кількості просторів 130
Д. Бази та передбази топології добутку 132
Е. Декартові та діагональні добутки відображень 133
Лекція 6. Аксіоми відокремлення 140
А. Аксіоми T_0 та T_1 140
Б. Аксіома T_2. Гаусдорфові простори 141
В. Аксіома T_3. Регулярні простори 142
Г. Аксіома T_4. Нормальні простори 143
Д. Спадкові властивості 145
Лекція 7. Зв'язність та її різновиди 150
А. Відокремлені множини 150
Б. Зв'язні множини і простори 150
В. Критерії зв'язності 151
Г. Зв'язність дійсної прямої та проміжків на ній 152
Д. Дії, що зберігають зв'язність. Компоненти зв'язності 153

Е. Криві. Лінійно зв'язні множини 155
Ж. Локальна зв'язність та локальна лінійна зв'язність 157
Лекція 8. Продовження функцій і функціональна відокремленість 162
А. Функціональна відокремленість. Тихоновські простори 162
Б. Велика лема Урисона 163
В. Продовження неперервної функції, заданої на замкненому підпросторі 164
Г. Функціонально відкриті та функціонально замкнені множини. Досконалі простори 166

Розділ III. Компактність і метризовність 171
Лекція 1. Компактні множини та простори 171
А. Компактність 171
Б. Зліченна компактність 172
В. Ознаки компактності та зліченної компактності 173
Г. Властивості компактних множин та просторів 175
Лекція 2. Компактність топологічного добутку. Вкладення в куби. Компактифікації 181
А. Компактність топологічних добутків 181
Б. Вкладення у тихоновські куби 184
В. Вкладення у гільбертів куб 185
Г. Компактифікації 187
Лекція 3. Стоун-чехівська компактифікація. Александровська компактифікація. Локальна компактність 190
А. Порівняння компактифікацій. Компактифікація Стоуна-Чеха 190
Б. Локально компактні простори. Компактифікація Александрова 193
Лекція 4. Паракомпактність і метризовність 200
А. Властивості сімей множин у топологічному просторі 200
Б. Паракомпактні простори 201
В. Теорема Стоуна 201
Г. Теорема Нагати-Смирнова про метризовність 203
Д. Стиснення покриття і розбиття одиниці 204

Розділ IV. Многовиди 210
Лекція 1. Локально евклідові простори. Топологічні многовиди 210

А. Карти. Локально евклідові простори 210
Б. Топологічні многовиди. Внутрішність та край 212
В. Атлас многовида 214
Г. Задання топології на многовиді з допомогою атласу 215
Д. Еквівалентні атласи 216
Е. Компоненти зв'язності многовида. Відкриті і замкнені многовиди 217
Лекція 2. Диференційовні многовиди. Функції на многовидах. Дифеоморфізми 220
А. Класи гладкості функцій 220
Б. Координатне зображення функції, визначеної на підмножині многовида. Перевірка неперервності та класу гладкості такої функції 222
В. C^r-узгодженість карт та C^r-атлас 223
Г. C^r-еквівалентність атласів. Структура диференційовного многовида 224
Д. Коректне означення класів гладкості для функцій у многовиди та між многовидами 224
Е. Приклад побудови атласів диференційовних многовидів та перевірки гладкості відображення між ними 226
Ж. Дифеоморфізми 227
И. Утворення нових диференційовних многовидів з існуючих 227
Лекція 3. Відображення між диференційовними многовидами та їх локальна будова 231
А. Матриця Якобі і сильна похідна 231
Б. Теореми про неявну функцію та про обернену функцію 232
В. Відображення півпростору у себе, яке локально зберігає край, і обернене до нього 233
Г. Ранг матриці Якобі локального зображення. Випадок лінійно незалежних рядків 235
Д. Регулярні точки диференційовного відображення. Регулярні відображення. Імерсії і субмерсії 237
Е. C^r-вкладення та C^r-підмноговиди 238
Ж. Правильні відображення 238

И. Будова правильного у точці відображення між многовидами рівної вимірності. Локальний дифеоморфізм 240
К. Правильні у точці відображення між многовидами різної вимірності 241
Л. Задання диференційовних многовидів у скінченновимірному евклідовому просторі рівняннями та нерівностями 244
Лекція 4. Дотичний простір до диференційовного многовида. Дотичне розшарування 248
А. Диференціювання та його координати 248
Б. Дотичний простір як множина диференціювань. Перетворення при зміні локальної системи координат 249
В. Дотичні вектори як швидкості кривих у точці 250
Г. Побудова диференціювання у точці на основі кривої, що проходить через точку 251
Д. Дотичний многовид 252
Е. Дотичне розшарування 253
Ж. Векторні поля та їх інтегральні криві 253
И. Відображення дотичних просторів, індуковане диференційовним відображенням між многовидами 254
К. Порівняння орієнтації баз лінійного простору 255
Л. Порівняння орієнтації баз дотичних просторів у різних точках диференційовного многовида 256
М. Орієнтовні і неорієнтовні многовиди 259

Розділ V. Елементи алгебраїчної топології 263
Лекція 1. Гомотопії і ретракції 263
А. Гомотопія між відображеннями 263
Б. Гомотопійні класи та гомотопійна еквівалентність 265
В. Обмеження та об’єднання гомотопій 266
Г. Зв’язані гомотопії 266
Д. Коли гомотопність є гарантованою? 267
Е. Стягувані простори 268
Ж. Ретракції і ретракти та їх види 269
Лекція 2. Фундаментальна група 273
А. Параметризовані криві та заміни параметра 273
Б. Еквівалентність кривих. Петлі 273

В. Добуток кривих 275
Г. Зміна кривих на еквівалентні та вибір замін параметра не впливають на клас добутку 276
Д. Асоціативність множення кривих з точністю до еквівалентності 277
Е. Множення класів петель. Фундаментальна група 278
Ж. Як залежить фундаментальна група від вибору базової точки? 279
И. Гомоморфізм фундаментальних груп, індукований неперервним відображенням 280
К. Фундаментальні групи ретрактів та стягуваних просторів 282
Лекція 3. Накриваючі простори та підняття відображень 286
А. Накриття топологічного простору 286
Б. Існування і єдиність накриваючого шляху 288
В. Підняття відображення з одиничного квадрата. Еквівалентні криві мають еквівалентні підняття 289
Г. Підняття відображень з лінійно зв’язних просторів 291
Д. Універсальне накриття та застосування його автоморфізмів для обчислення фундаментальної групи 294
Е. Фундаментальна група кола 297
Лекція 4. Обчислення та застосування фундаментальних груп 300
А. Фундаментальна група добутку просторів 300
Б. Вільний добуток груп. Пряма сума абелевих груп 301
В. Фундаментальна група букета просторів 303
Г. Гомотопійно еквівалентні простори мають ізоморфні фундаментальні групи 308
Д. Приклади застосувань фундаментальних груп 308

Предметний покажчик 315

Література 324

Вступ

Зростання ролі геометричних і топологічних методів не тільки в математиці, а й у механіці, фізиці, біології, економіці тощо змушує розглядати топологію як одну з основних дисциплін, яка поряд з математичним і функціональним аналізом, лінійною та загальною алгеброю, диференційними рівняннями складає фундамент сучасної математичної освіти. Мова теоретико-множинної (загальної) топології важлива не лише для диференціальної геометрії та топології, а й скрізь, де вживаються поняття неперервності та близькості, тобто практично у всіх математичних курсах, включно з прикладними на зразок рівнянь математичної фізики та методів обчислень.

Водночас досі немає єдності щодо нормативного обсягу і змісту викладання топології для математиків — цей предмет може викладатись на протязі семестру чи року, бути окремим курсом чи об'єднаним з диференціальною геометрією, або взагалі поділеним на дві частини — вступну (для бакалаврів) та поглиблену (маґістерську). Рівень складності та детальності викладу теж залежить від мети — дати студентові загальне уявлення про основні розділи топології, як у підручнику [**15**], або підготувати випускника університету до аспірантури з геометрії і топології, для чого ідеально надаються [**1, 7, 13**]. Не претендуючи на останнє, автор мав на думці два основні застосування свого тексту — як бази для лекційного курсу та як нескладної книги для самостійного вивчення чи повторення основ топології. Хоча вибір і тем, і матеріалу у межах теми залишається за викладачем або читачем, рискою збоку сторінки виділено "менш обов'язкові" і складніші частини змісту, які можна оминути при браку часу або винести на самостійне опрацювання. Двома рисками позначені технічно складні міркування, які вимагають вищого рівня абстракції, наприклад, із застосуванням леми Цорна чи трансфінітної індукції. Така "багаторівневість" полегшить пристосування до можливостей викладача і студента та вимог навчального плану.

Підручник охоплює загальнотопологічну (основну) частину університетської програми з топології разом з елементами теорії многовидів та алгебраїчної топології — розділів, які варто розглянути детальніше у межах предметів за вибором.

Двадцять п’ять лекцій поділено на п’ять розділів. Перший розділ має підготовчий характер і розглядає загальні властивості множин, їх відношень та відображень (з точки зору “наївної” теорії множин, чого достатньо для більшості застосувань), а також метричні простори, їх властивості і відображення. Читач може обмежитись цим розділом, якщо його метою є краще засвоєння математичного та функціонального аналізу.

Другий розділ містить виклад основних понять і фактів, пов’язаних з топологічними просторами. Описано способи задання топології, найважливіші властивості топологічних просторів та їх підмножин, дії над просторами. Розглянуто неперервні відображення, їх властивості та задачу продовження неперервних функцій.

У третьому розділі детально розглядаються важливі (зокрема, для математичного та функціонального аналізу) властивості типу компактності, а також їх застосування до задачі метризації (тобто з’ясування, чи задається дана топологія деякою функцією відстані).

Четвертий розділ присвячено основним поняттям і елементарним фактам теорії многовидів. Диференційовні многовиди є предметом диференціальної топології і близько пов’язаної з нею диференціальної геометрії, тому ми залишаємо для останньої вивчення глибоких і красивих геометричних аспектів цієї теорії. Наприклад, “за бортом” залишились класифікація двовимірних многовидів, тензорний аналіз та ріманова геометрія. У підручнику подано тільки загальнотопологічні основи, щоб читач міг скласти уявлення про топологічні та диференційовні многовиди і розуміти строгий зміст зазвичай наочних та неформальних геометричних побудов і міркувань.

У п’ятому розділі ми знайомимо читача з елементарними поняттями теорії гомотопій і теорії ретрактів, достатніми для обчислення фундаментальних груп найпростіших просторів. Метою є демонстрація основної ідеї алгебраїчної топології — функторіального переходу від топологічних просторів та їх відображень до алгебраїчних об’єктів та їх гомоморфізмів.

Важливі поняття та теореми ілюструються прикладами. Кожна лекція супроводжується питаннями для (само-)контролю засвоєння та вправами, які є основою для проведення практичного заняття з даної теми (в поєднанні зі збірником [**14**] та іншими). Вправи містять значну кількість додаткового матеріалу, який, втім, не обов’язковий для вивчення наступних тем. Підручник може використовуватись і як довідник, чому сприяє детальний предметний покажчик.