

Олег Никифорчин

## **Вступ до теорії множин**

Підтримано грантом програми  
“Talents for Ukraine”  
Благодійного фонду “Київська школа  
економіки”

Івано-Франківськ

2024

УДК 510.22

MSC 2020: 03E30

H62

*Підтримано грантом програми “Talents for Ukraine” Благодійного фонду “Київська школа економіки”.*

Схвалено до друку вченою радою факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Рецензенти: проф., д.ф.-м.н. Т.О. Банах, професор кафедри алгебри, топології та основ математики Львівського національного університету ім. Івана Франка;

проф, д.ф.-м.н. О.В. Маслюченко, професор кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету ім. Юрія Федьковича.

**Никифорчин, Олег**

H62 Вступ до теорії множин / Олег Никифорчин. — Івано-Франківськ: Голіней О.В., 2024. — 88 с.

ISBN 978-617-95377-7-6

У посібнику у вигляді курсу лекцій викладено початки теорії множин. Для студентів математичних спеціальностей університетів та наукових працівників у галузях математики, де потрібне застосування методів теорії множин.

УДК 510.22

ISBN 978-617-95377-7-6

© Олег Никифорчин, 2024

# Зміст

Передмова	6
Розділ I. Аксиоми теорії множин	7
Лекція 1. Роль і побудова теорії множин	7
А. Наївна теорія множин	7
Б. Шляхи виходу з кризи математики	8
В. Кроки	8
Г. Праелементи та існування множин	9
Д. Позначення і мова	10
Лекція 2. Аксиоми теорії множин	11
А. Рівність та існування множин	11
Б. Об'єднання і степенева множина	13
В. Дія операції на елементи множини	14
Г. Мінімальні елементи	15
Лекція 3. Перші наслідки з аксіом та інструментарій теорії множин	16
А. Порожня множина і непорожні множини	16
Б. Об'єднання, перетини і різниці	17
В. Нездійсненність парадоксу Рассела	17
Г. Пари, відношення та функції	18
Д. Обмеження та продовження	19
Вправи до розділу I	20
Розділ II. Порядкові числа та індукція	23
Лекція 1. Нескінченність та математична індукція	23
А. Наступна множина	23
Б. Індуктивні множини. Аксиома нескінченності	23
В. Множина натуральних чисел	24
Г. Непотрібність праелементів	26
Лекція 2. Порядкові числа	26
А. Транзитивні множини	26
Б. Ординали	27
В. Порівняння ординалів	27

Г.	Трансфінитна індукція	28
Д.	Порівнянність всіх ординалів	29
Е.	Найменший ординал	30
Ж.	Граничні та ізольовані ординали	31
Лекція 3.	Означення за індукцією. Кроки	31
А.	Бінарні операції	31
Б.	Означення за індукцією	32
В.	Існування транзитивної надмножини і $\in$ -індукція	34
Г.	Формальне означення кроків	35
Лекція 4.	Цілком впорядковані множини. Арифметика ординалів	36
А.	Цілком впорядковані множини	36
Б.	Ізоморфізми впорядкованих множин	37
В.	Будова цілком впорядкованої множини	37
Г.	Дії над цілком впорядкованими множинами	39
Д.	Додавання та множення ординалів	40
Е.	Індуктивне означення додавання та множення	41
Ж.	Піднесення ординала до степеня	43
Вправи до розділу II		44
Розділ III.	Аксиома вибору. Потужності	50
Лекція 1.	Аксиома вибору та рівносильні твердження	50
А.	Навіщо потрібна аксіома вибору?	50
Б.	Формулювання та рівносильні твердження	52
В.	Декартові добутки	54
Лекція 2.	Застосування аксіоми вибору	55
А.	Існування бази векторного простору	55
Б.	Адитивні функції, які не є лінійними	56
В.	Максимальні ідеали кільця з одиницею	57
Г.	Теорема Гана-Банаха	57
Д.	Ультрафільтри	60
Лекція 3.	Потужності і кардинальні числа	61
А.	Потужність множини	61
Б.	Ін'єкції та порівняння потужностей	63
В.	Неіснування найбільшого кардинала та множини всіх кардиналів	64

---

Г. Потужності об'єднань і декартових добутків	64
Д. Потужність множини дійсних чисел	67
Лекція 4. Арифметика кардиналів	68
А. Як отримувати більші кардинали?	68
Б. Додавання та множення кардиналів	69
В. Піднесення до степеня	72
Лекція 5. Конфінальності. Регулярні та сингулярні кардинали	74
А. Конфінальність лінійно впорядкованої множини	74
Б. Регулярні та сингулярні кардинали	76
В. Степені нескінченних кардиналів. Рекурсивна формула Гаусдорфа	77
Вправи до розділу III	79
Післямова	84
Предметний покажчик	85
Література	88

## Передмова

Теорія множин є досить “рафінованим” розділом математики з погляду її споживача, наприклад, з ІТ чи природничих наук. Однак сьогодні вона може придатися навіть математику, зорієнтованому на практичні застосування. У наш час алгебра, функціональний аналіз чи топологія реально працюють у прикладних задачах (наприклад, у криптології чи розпізнаванні образів), а досягти успіхів у цих розділах без глибокого розуміння леми Цорна чи трансфінітної індукції неможливо. Інакше отримуємо ситуацію, як з теоремою Гана-Банаха, коли лектор традиційно демонструє тільки індуктивний крок і приховує від слухача, що це далеко не все доведення.

Зрештою, для будь-якого математика корисно розуміти, чим насправді є ті кардинальні числа, якими вимірюють кількості елементів у множинах, і чому “потужність континууму” не така, як “потужність омега”.

При написанні цього посібника автор запозичив ідеї з книг, у яких, на його думку, основи теорії множин викладено найвдаліше, хоча подекуди і відступив від оригінального підходу чи змінив позначення, наприклад, у лекції про ординальну арифметику. Основні зусилля було докладено до того, щоб якнайдоступніше подати досить формальні і абстрактні речі та продемонструвати їх практичне застосування. Дякуємо рецензентам, а також Марії Савчин, Михайлові Попову та іншим читачам робочої версії книги, які доклалися до її покращення. Окрема подяка синові, Андрієві Никифорчину, котрий спонукав автора охопити теми, які початково не планувалось розглядати.