

Олег Никифорчин

Лінійна алгебра та елементи геометрії

Підтримано грантом програми
“Talents for Ukraine”
Благодійного фонду “Київська школа
економіки”

Івано-Франківськ

2024

УДК 512.64; 514.74

MSC 2020: 15-01

H62

Підтримано грантом програми “Talents for Ukraine” Благодійного фонду “Київська школа економіки”.

Схвалено до друку вченою радою факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Рецензенти: чл.-кор. НАН України, проф., д.ф.-м.н. С.І. Максименко, завідувач відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України;

с.н.с., к.ф.-м.н. О.В. Гутік, доцент кафедри алгебри, топології та основ математики Львівського національного університету ім. Івана Франка.

Никифорчин, Олег

H62 Лінійна алгебра та елементи геометрії / Олег Никифорчин. — Івано-Франківськ: Голіней О.В., 2024. — 346 с.

ISBN 978-617-95377-6-9

В посібнику у вигляді курсу лекцій викладено основи лінійної алгебри з застосуваннями до геометрії образів першого та другого степеня. Кожна лекція супроводжується завданнями для самостійного розв’язування.

УДК 512.64; 514.74

ISBN 978-617-95377-6-9

© Олег Никифорчин, 2024

Зміст

Przedmowa do polskiego wydania	10
Передмова до українського видання	12
Частина 1. Числа і вектори. Системи лінійних рівнянь і матриці.	
Прямі і площини	14
Розділ I. Числа. Алгебраїчні структури	15
Лекція 1. Натуральні, цілі, раціональні, дійсні числа. Групи, кільця, тіла	15
А. Множини та відображення	15
Б. Операції	17
В. Групи та кільця	19
Г. Тіла і поля	20
Лекція 2. Комплексні числа	22
А. Розширення тіла. Алгебраїчно замкнене поле	22
Б. Конструкція поля \mathbb{C}	24
В. Дійсна пряма і комплексна площина	25
Г. Число, спряжене до комплексного числа. Множення і ділення чисел у алгебраїчній формі	27
Д. Модуль, аргумент і тригонометрична форма комплексного числа	28
Е. Знаходження оберненого, множення, ділення, піднесення до степеня та добування кореня з чисел у тригонометричній формі	30
Ж. “Переваги” та “недоліки” поля \mathbb{C} . Основна теорема алгебри	32
І. Показникова форма комплексного числа	33
Розділ II. Векторні простори	36
Лекція 1. Поняття векторного простору. Підпростори	36
А. Геометричні вектори	36

Б.	Властивості додавання	38
В.	Множення геометричних векторів на дійсні числа	40
Г.	Координатний простір	41
Д.	Поняття векторного простору над полем	42
Е.	Підпростори	44
Лекція 2.	Лінійні оболонки. Системи векторів. База та координати щодо бази	47
А.	Оболонки та лінійні комбінації	47
Б.	Лінійна незалежність	50
В.	Лема про заміну	53
Г.	Бази	54
Д.	Координати	56
Розділ III.	Матриці і системи лінійних рівнянь	61
Лекція 1.	Матриці та операції над матрицями	61
А.	Поняття матриці	61
Б.	Типи числових матриць	62
В.	Додавання матриць та множення їх на числа. Транспонування	64
Г.	Множення матриць між собою	66
Лекція 2.	Системи лінійних рівнянь	72
А.	Означення лінійної системи та її матрична форма	72
Б.	Типи систем лінійних рівнянь	73
В.	Множина розв'язків однорідної лінійної системи	74
Г.	Загальний розв'язок неоднорідної системи	76
Д.	Лінійні системи зі східчастою розширеною матрицею	77
Е.	Метод Гаусса розв'язування лінійних систем	79
Ж.	Метод Гаусса-Йордана	83
Розділ IV.	Визначники та їх застосування	88
Лекція 1.	Група перестановок	88
А.	Композиція відображень	88
Б.	Перестановки та симетрична група	90
В.	Цикли та транспозиції. Парні та непарні перестановки	93
Г.	Інверсії	96
Лекція 2.	Означення визначника та його властивості	99

А.	Визначник як сума добутоків	99
Б.	Альтернативне означення визначника і визначник транспонованої матриці	101
В.	Визначники спеціальних типів матриць	102
Г.	Властивості визначників	107
Д.	Розклад Лапласа	111
Лекція 3. Ранги матриць, елементарні перетворення та визначники		116
А.	Ранг матриці за рядками або стовпцями	116
Б.	Теорема Кронекера-Капеллі	118
В.	Ранг матриці за мінорами	118
Г.	Елементарні матриці	120
Д.	Визначник добутку матриць	123
Е.	Аксиоматичне означення визначника	124
Лекція 4. Формули Крамера. Обернена матриця та її застосування		128
А.	Метод Крамера	128
Б.	Обернена матриця	134
В.	Матричний метод розв'язування лінійних систем	139
Г.	Лінійні групи	140
Розділ V. Афінні простори. Елементарна геометрія площини і тривимірного простору		142
Лекція 1. Афінні простори. Системи координат		142
А.	Поняття афінного простору	142
Б.	Прямі і відрізки. Афінні та опуклі комбінації двох точок	143
В.	Афінні підпростори та опуклі множини	146
Г.	Афінний координатний простір	150
Д.	Афінна система координат	151
Е.	Барицентричні координати	154
Лекція 2. Скалярний добуток. Прямі на площині		159
А.	Скалярний добуток геометричних векторів	159
Б.	Формула скалярного добутку. Декартова прямокутна система координат	161
В.	Рівняння прямої на площині	162
Г.	Орієнтована площа	165

Д.	Нормальний вектор і загальне рівняння	170
Е.	Спеціальні типи загального рівняння	171
Ж.	Взаємне розташування прямих і кути між ними	173
Лекція 3.	Векторний та мішаний добуток	178
А.	Векторний добуток	178
Б.	Мішаний добуток	181
В.	Формули для векторних і мішаних добутоків	185
Лекція 4.	Прямі та площини в тривимірному просторі	188
А.	Параметричні рівняння прямої та площини	188
Б.	Рівняння площини та прямої через нормальні вектори	189
В.	Використання мішаних та векторних добутоків	192
Г.	Взаємне розташування площин	196
Д.	Взаємне розташування прямих	198
Е.	Взаємне розташування прямої та площини	199
Частина 2.	Лінійні оператори. Білінійні і квадратичні форми.	
Квадрики		205
Розділ VI.	Лінійні відображення	206
Лекція 1.	Лінійні оператори	206
А.	Означення і приклади лінійного оператора	206
Б.	Операції над операторами	207
В.	Образ та ядро оператора	208
Г.	Ізоморфізм. Обернений оператор	209
Д.	Ранг і дефект оператора	211
Лекція 2.	Матриці операторів і лінійних форм. Власні вектори та власні значення	213
А.	Матриця лінійного оператора	213
Б.	Лінійні форми та їх матриці	215
В.	Матриця композиції операторів. Матриця оберненого оператора	216
Г.	Означення власного вектора та власного значення. Характеристичне рівняння	217
Д.	Власний підпростір	218
Е.	Пряма сума власних підпросторів	218

Лекція 3. Матриці лінійних операторів у різних базах.	
Діагоналізація матриці лінійного оператора	225
А. Матриця переходу	225
Б. Перетворення матриць операторів і форм під час зміни бази	226
В. Детермінант, слід і характеристичне рівняння як інваріанти	227
Г. Діагоналізація матриці оператора	228
Д. Спектр, кратності коренів характеристичного рівняння та виміри власних підпросторів	230
Лекція 4. Жорданова форма матриці лінійного оператора.	
Фактор-простори	233
А. Многочлени від операторів та матриць	233
Б. Кореневі підпростори	235
В. Пряма сума кореневих підпросторів	238
Г. Фактор-простір	238
Д. Блочно-діагональна матриця лінійного оператора	241
Е. Дія лінійного оператора на окремому кореневому підпросторі	241
Ж. Вимір кореневого підпростору	245
І. Жорданова форма матриці лінійного оператора	247
Розділ VII. Евклідові простори	252
Лекція 1. Скалярний добуток	252
А. Поняття скалярного добутку	252
Б. Приклади скалярних добутків та нерівність Коші	253
В. Скалярний добуток і норма	255
Г. Кути та ортогональність	256
Д. Процес ортогоналізації Грама-Шмідта	257
Лекція 2. Бази та підпростори в евклідових просторах	261
А. Ортонормовані системи та бази	261
Б. Ортогональна сума. Ортогональне доповнення. Ортогональна проекція	262
Розділ VIII. Лінійні оператори в евклідових просторах	266
Лекція 1. Спряжений оператор	266

А.	Означення та існування спряженого оператора	266
Б.	Спряженість та операції над операторами	268
В.	Ядра та образи спряжених операторів	268
Лекція 2.	Самоспряжені оператори	270
А.	Поняття та найпростіші властивості самоспряженого оператора	270
Б.	Існування ортонормованої бази з власних векторів	271
В.	Додатні оператори та їх квадратні корені	273
Лекція 3.	Ортогональні оператори. Полярний розклад	275
А.	Рівносильні означення ортогонального оператора	275
Б.	Оператори, що зберігають ортогональність векторів	278
В.	Полярний розклад	278
Г.	Вигляд лінійних операторів у просторі геометричних векторів на площині	280
Розділ IX.	Функції другого степеня	284
Лекція 1.	Білінійні форми	284
А.	Білінійна форма та її матриця	284
Б.	Перетворення матриці білінійної форми	286
В.	Властивості білінійних форм	287
Г.	Простір білінійних форм	288
Лекція 2.	Квадратичні форми	290
А.	Поняття квадратичної форми та її зв'язок з білінійними формами	290
Б.	Тотожність паралелограма і безпосереднє означення квадратичної форми	292
Лекція 3.	Канонічний вигляд квадратичної форми	296
А.	Квадратичні форми та самоспряжені оператори	296
Б.	Діагоналізація квадратичної форми	297
В.	Сигнатура і закон інерції квадратичних форм	298
Г.	Додатно та від'ємно визначені квадратичні форми	301
Д.	Метод Якобі зведення квадратичної форми до канонічного вигляду	301
Е.	Критерій Сильвестра	304
Розділ X.	Криві і поверхні другого степеня	307

Лекція 1. Еліпс	307
А. Означення та канонічне рівняння еліпса	307
Б. Ексцентриситет еліпса, його полярне рівняння та параметрична форма	309
В. Директриси еліпса	311
Лекція 2. Гіпербола. Парабола	312
А. Означення та канонічне рівняння гіперболи	312
Б. Похилі асимптоти	313
В. Ексцентриситет гіперболи, її полярне рівняння та параметрична форма	315
Г. Директриси гіперболи	316
Д. Означення, канонічне рівняння та полярне рівняння параболи	317
Лекція 3. Квадрики	320
А. Означення квадрики	320
Б. Зміна системи координат	321
В. Спрощення рівняння квадрики	322
Г. Центральна точка функції другого степеня	323
Лекція 4. Класифікація кривих і поверхонь другого степеня	327
А. Криві степеня 2	327
Б. Поверхні степеня 2	329
Предметний покажчик	337
Література	346

Przedmowa do polskiego wydania

Skrypt ten powstał z notatek do wykładów z algebry liniowej z geometrią, prowadzonych przez autora w Instytucie matematyki Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego w Bydgoszczy. Ostatecznie autor zdecydował się na jego napisanie dzięki inicjatywie uporządkowania i uzgodnienia struktury i treści przedmiotów algebraicznych w programie studiów na kierunku Matematyka.

Skrypt został ułożony w ten sposób, aby mógł służyć jako konspekt wykładu, dlatego jego struktura odzwierciedla aktualny program przedmiotu, w szczególności, przydzielony czas (po 45 godzin wykładów w dwóch semestrach). Każda z dwóch części została podzielona na 15 “wykładów” (tematów), które przeciętnie udaje się zmieścić w 3 godziny akademickie. Materiał “mniej obowiązkowy” jest oznaczony jedną kreską, a trudniejszy dwiema kreskami na marginesie, co pozwala wykładowcy lub czytelnikowi dostosować tekst do bilansu czasu, poziomu rocznika lub celów studiowania przedmiotu.

Głównym kryterium podczas napisania była naturalność kolejności: ma być zrozumiałe, skąd wszystko się bierze i dlaczego służy. Ma to efekt uboczny, nie zawsze pożądany, że pojęcia abstrakcyjne, na przykład, ciała lub przestrzenie wektorowe, pojawiają się już na pierwszych zajęciach. Autor starał się skompensować to różnymi przykładami, aby słuchacz lub czytelnik mógł odczuć te obiekty “w ciele i krwi”. Wymagania wstępne obejmują tylko program matematyki szkolnej, więc książka z powodzeniem przyda się do samodzielnego opanowania przedmiotu, w szczególności, studentom specjalności przyrodniczych i technicznych.

Wskutek ograniczeń czasowych oraz pomyślanej roli książki jako “primer”, tzn. podręcznika dla pierwszego zapoznania się z przedmiotem, część zagadnień klasycznych algebry liniowej została pominięta. Na przykład, nie

znajdzie tu czytelnik przestrzeni ilorazowych, postaci normalnej Jordana, twierdzenia Hamiltona-Cayley'a lub operatorów normalnych. Dlatego zapraszamy wykładowców i studentów do korzystania z literatury uzupełniającej, niektóre pozycje której są podane w liście na końcu skryptu.

Każdemu wykładowi towarzyszy zbiór przykładowych zadań, który nie są obowiązkowe lub wyczerpujące, ale są tylko punktem wyjścia dla prowadzącego ćwiczenia. Czytelnik studiujący algebrę liniową z geometrią samodzielnie, może używać te zadania dla sprawdzenia, czy naprawdę pozornie zrozumiał materiał teoretyczny został oswojony. Duża część ich została zaczerpnięta z książek [5, 10], wielokrotnie wydawanych.

Autor składa serdeczne podziękowanie Koleżankom i Kolegom za wsparcie i cenne uwagi do roboczej wersji skryptu. Z wdzięcznością przyjmujemy sugestie i opinie czytelników.

Передмова до українського видання

Пропонуємо вашій увазі українську версію посібника з лінійної алгебри з елементами геометрії, яку автор готував одночасно з польською. Остаточним поштовхом до його написання стала ініціатива з упорядкування і узгодження структури і змісту алгебраїчних предметів на напрямку “Математика” Інституту математики Університету Казимира Великого в Бидгощі. На результат вплинув особистий педагогічний досвід автора, його уявлення про оптимальний зміст і послідовність вивчення лінійної алгебри, особливості програм та традиції викладання математики в Україні та Польщі. Як видається, взаємний вплив і порівняння могли б бути корисними, попри виразні відмінності. Скажімо, у Польщі побутує думка (котру автор не цілком поділяє), що аналітична геометрія є архаїчним предметом, який не заслуговує на окреме місце у навчальних планах математичних спеціальностей, тому її елементи побіжно у дуже обмеженому обсязі вивчаються разом з лінійною алгеброю. З іншого боку, в Україні аналітична геометрія, хоч і формує основи геометричного мислення, але переважно викладається досить ізольовано від алгебраїчних предметів, з униканням абстракції на користь практики, і є, мабуть, найбільш “шкільним” за духом курсом у програмі першого року навчання.

Структура цієї книжки відповідає діючій програмі і польському інтегрованому підходу, однак геометрична частина є розширеною, хоча й складає меншість обсягу. Ідея полягає у тому, що алгебра надає міцний абстрактний фундамент для геометрії, а геометрія дозволяє залучити уяву, візуалізувати алгебраїчні поняття та доведення і призвичаїти студента мислити про об’єкти числової природи в геометричних категоріях, що не раз придасться, наприклад, у функціональному аналізі чи диференціальній геометрії і топології.

Одне з призначень посібника — бути основою для лекційного курсу, орієнтовний навчальний час якого складає по 45 годин лекцій у двох семестрах. Дві частини поділено на 30 “лекцій” (тем), які в середньому вдається викласти за три академічні години (лекція 2 розділу V першої частини є “подвійною”, а лекцію 4 про жорданову форму у VI розділі другої частини можна вважати “бонусною”). Менш обов’язковий матеріал позначено однією рисою на полях, а складніший — двома. Це дозволяє читачеві або викладачеві регулювати обсяг відповідно до часу, аудиторії і потреб.

Головним критерієм при написанні була природність і послідовність: повинно бути зрозумілим, “звідки і навіщо”. Тому алгебра “смугами” чергується з геометрією, і впровадження понять та доведення фактів завжди передують їх використанню. Зокрема, поля чи векторні простори з’являються вже на перших заняттях. Автор намагався пом’якшити дискомфорт численними прикладами, щоб читач або слухач міг відчути ці об’єкти “в тілі і крові”. Виклад спирається тільки на знання шкільної математики, так що книжка може придатися і для самостійного вивчення предмету студентами не лише математичних, але й природничих і технічних спеціальностей.

Через часові обмеження та плановану роль книжки як “primer”, тобто підручника для початкового ознайомлення з предметом, автор був змушений оминати деякі класичні теми лінійної алгебри. Наприклад, читач не знайде тут теореми Гамільтона-Келі чи нормальних операторів. Тому закликаємо викладачів і студентів користуватись додатковою літературою.

Після кожної лекції подано підбірку вправ, яка є не обов’язковою чи вичерпною, а тільки орієнтиром для викладача, що проводить практичні заняття, а також “пробним каменем” для читача, який вивчає предмет самостійно. Значну частину вправ запозичено (переважно зі змінами) зі збірників [5, 10], перевічених часом і багаторазово перевиданих.

Автор висловлює щирю подяку колегам за підтримку і цінні зауваження до робочих версій посібника, у першу чергу докторові Лукашу Матисякові, який став першим читачем і уважним коректором, та рецензентам. З вдячністю приймемо відгуки і побажання.