

Олег Никифорчин

Елементи теорії категорій

Підтримано грантом програми
“Talents for Ukraine”
Благодійного фонду “Київська школа
економіки”

Івано-Франківськ

2024

УДК 512.58

MSC 2020: 18-01

H62

Підтримано грантом програми “Talents for Ukraine” Благодійного фонду “Київська школа економіки”.

Схвалено до друку вченою радою факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Рецензенти: проф., д.ф.-м.н. Т.О. Банах, професор кафедри алгебри, топології та основ математики Львівського національного університету ім. Івана Франка;
к.ф.-м.н. Б.Г. Фещенко, науковий співробітник лабораторії топології відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України.

Никифорчин, Олег

H62 Елементи теорії категорій / Олег Никифорчин. — Івано-Франківськ: Голіней О.В., 2024. — 119 с.

ISBN 978-617-95377-9-0

У посібнику у вигляді курсу лекцій викладено початки теорії категорій. Кожна лекція супроводжується завданнями для самостійного розв'язування.

УДК 512.58

ISBN 978-617-95377-9-0

© Олег Никифорчин, 2024

Зміст

Передмова	6
Розділ I. Елементарні поняття і факти теорії категорій	8
Лекція 1. Графи та категорії	8
А. Графи	8
Б. Множини і відображення	9
В. Поняття категорії	10
Г. Приклади категорій	11
Д. Морфізми графів. Діаграми	14
Лекція 2. Способи утворення категорій	17
А. Вільні моноїди і вільні категорії. Твірні і співвідношення	17
Б. Протилежна категорія	19
В. Підкатегорії	20
Г. Добутки категорій	22
Д. Категорії стрілок	23
Лекція 3. Властивості стрілок та об'єктів	27
А. Початкові та кінцеві об'єкти	27
Б. Скоротні зліва чи справа стрілки	28
В. Оборотні зліва чи справа стрілки	30
Г. Ізоморфізми	32
Розділ II. Границі	36
Лекція 1. Границі як універсальні конуси	36
А. Конуси та їх комутативність	36
Б. Універсальність	38
В. Добутки	38
Г. Зрівнювачі	41
Д. Пуллбеки	43

Лекція 2. Єдиність та існування границь. Повнота категорій	46
А. Категорія конусів	46
Б. Границя діаграми як кінцевий об'єкт	46
В. Існування скінченних границь	47
Г. Існування границь довільних діаграм	52
Лекція 3. Кограниці	53
А. Коконуси та їх комутативність	53
Б. Категорія коконусів. Поняття кограниці	54
В. Суми (кодобутки)	55
Г. Козрівнювачі і пушаути	57
Д. Існування кограниць	59
Розділ III. Функтори та їх спряженість	61
Лекція 1. Функтори	61
А. Поняття функтора та приклади	61
Б. Контраваріантні функтори	63
В. Властивості функторів	64
Г. Композиції функторів. Категорія малих категорій	65
Лекція 2. Природні перетворення	67
А. Поняття природного перетворення	67
Б. Композиція природних перетворень. Категорія функторів	68
В. Ізоморфні функтори	69
Г. Множення природних перетворень на функтори та між собою	70
Д. Еквівалентність категорій	71
Лекція 3. Вільні об'єкти	73
А. Поняття і вільного об'єкта. Приклади	73
Б. Існування вільних об'єктів	75
В. Збереження границь функторами та існування розв'язуючих множин	78
Г. Єдиність вільних об'єктів	79

Лекція 4. Спряжені функтори	81
А. Hom-функтори	81
Б. Представні функтори і вільні об'єкти	82
В. Функтор вільного об'єкта	83
Г. Означення і побудова спряжених функторів	84
Д. Симетричність означення спряженості. Одиниця і координиця спряження	87
Е. Спряженість у теорії порядку	90
Розділ IV. Монади та алгебри	93
Лекція 1. Монади	93
А. Що таке монада?	93
Б. Спряження породжує монаду	95
В. Категорія Клейслі	97
Г. Функтор порівняння Клейслі	99
Лекція 2. Алгебри та монадичність	101
А. Алгебра для монади	101
Б. Функтор порівняння Ейленберга-Мура	101
В. Монадичність	102
Г. Алгебри як козрівнювачі	107
Д. Теорема Бека	109
Предметний покажчик	115
Література	119

Передмова

Теорія категорій є відносно молодого галуззю математики порівняно з алгеброю, аналізом, диференціальними рівняннями чи навіть топологією. Її виникнення пов'язують зі статтею “General Theory of Natural Equivalences”, опублікованою Семюелем Ейленбергом і Сондерсом Маклейном у вересні 1945 року у журналі Transactions of the American Mathematical Society [4].

Ставлення математиків до теорії категорій залежить від їх схильності до абстрактного мислення і галузі, в якій вони працюють. Найбільші ентузіасти трактують категорії як альтернативну до теорії множин основу всієї математики. Представники обчислювальних розділів вважають їх надмірно розпіреною забавкою. Однак, незалежно від симпатій чи антипатій, теорія категорій поширюється у математиці і навіть поза нею просто через те, що вона працює. Її застосування у теорії гомологій, алгебраїчній геометрії, логіці, топології, функціональному аналізі стало традиційним [7]. Водночас сьогодні теорія категорій є основою сучасних методів програмування [2, 8] і функціональних мов, наприклад, Haskell.

Боб Коуке, співробітник Обчислювальної лабораторії Оксфордського університету, у своєму есе “Introducing categories to the practicing physicist” стверджує, що фізикам-теоретикам просто необхідно знати і вміти застосувати теорію категорій, оскільки вони і так працюють з категоріями, навіть не підозрюючи цього!

Знаменитий математик Норман Стінрод назвав теорію категорій “загальною абстрактною нісенітницею” (general abstract nonsense) і успішно використав її у теорії гомологій. Ми сподіваємось, що ця абстрактна нісенітниця стане корисною і Вам.

Вибір матеріалу диктувався призначенням цього тексту — бути Primer, посібником для початкового ознайомлення з теорією категорій для студента з помірно математичною підготовкою, подібно до [5]. Різні підручники з теорії категорій мають, тим не менш, спільну частину — обов'язкові теми, які перелічив Стів Авді на початку своєї “Category Theory” [1] :

категорії, функтори, природні перетворення, еквівалентність, границі і ко-границі, представні функтори, лема Йонеди, спряжені функтори і монади. Ми майже виконали цю програму. Лема Йонеди не формулюється явно, однак її основну ідею використано при короткому описі представних функторів, достатньому для наших потреб. Останній розділ про монади та їх алгебри дещо складніший, і студент чи викладач може самостійно вирішити, взятись до нього відразу чи відкласти до кращих часів.

Подібно до того, як у комутативній діаграмі існують різні шляхи між тими ж вершинами і з тим самим результатом, можливі різні, але еквівалентні по суті підходи до викладу теорії категорій. Ми щоразу намагалися обирати найбільш інтуїтивний і природний варіант, часом жертвуючи елегантністю, якщо це не звужує можливостей.

Наприклад, можна означити категорію взагалі без вживання об'єктів, вказавши, які стрілки існують, які з них можна компонувати і що є результатом. Тоді об'єкти ототожнюються з одиничними стрілками (нейтральними елементами для композиції). Однак природно розглядати групи разом з гомоморфізмами, метричні простори разом з неперервними відображеннями тощо, тому нема сенсу відмовлятися від інтуїтивного сприйняття категорії як переважно класу множин зі структурою та відображень, що зберігають цю структуру.

Діаграму теж видається зрозумілішим означати як морфізм у категорію з малого графа, а не з малої категорії. Слідуючи [3], ми включили вимогу локальної малості у означення категорії, що дозволило вільно вживати hom-функтори до всіх категорій. Коли читач матиме потребу у “більших” категоріях, цю вимогу буде неважко відкинути. Переважно виклад спирається на наївну теорію множин, щоб не обтяжувати сприйняття надмірним формалізмом. Рискою збоку сторінки виділено “менш обов'язкові” і складніші частини змісту, які можна оминати при браку часу або винести на самостійне опрацювання.

Автор вдячний Катерині Копорх за збережений зі студентських часів конспект, що допомогло освіжити у пам'яті і підсумувати різні підходи до викладання основ теорії категорій.